Sobre la estructura de los espacios de operadores de Lorentz

Por Fernando Cobos

Recibido: 18 diciembre 1984

Presentado por el académico numerario D. Miguel de Guzmán

Abstract

ON THE STRUCTURE OF LORENTZ OPERATOR SPACES

We show that, expcept in the trivial case $p_0 = q_0 = 2$, the Lorentz operator space S_{p_0,q_0} is not isomorphic to a subspace of S_{p_1,q_1} for $1 < p_0, p_1 \leqslant 2$, $1 \leqslant q_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 < \infty$ and $q_0 \neq q_1$.

Resumen

Demostramos que, salvo en el caso trivial $p_0 = q_0 = 2$, el espacio de operadores de Lorentz S_{p_0,q_0} no es isomorfo a ningún subespacio de S_{p_1,q_1} para $1 < p_0, p_1 \leqslant 2$, $1 \leqslant q_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 < \infty$ y $q_0 \neq q_1$.

1. INTRODUCCION

Sea H un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Denotamos por $S_{p,q}$ ($1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$) el espacio de Banach formado por todos los operadores T lineales y continuos sobre H cuyos números de aproximación $(\alpha_n(T))$ pertenecen al espacio de sucesiones de Lorentz $l_{p,q}$. Cuando $p = q$ escribiremos simplemente S_p en lugar de $S_{p,p}$.

C. Giel y C. Cleaver [6] han probado que si $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant 2$, entonces S_{p_0} no es isomorfo a ningún subespacio de S_{p_1}. El objetivo de esta nota es demostrar que, salvo en el caso trivial $p_0 = q_0 = 2$, el espacio S_{p_0,q_0} no es isomorfo a ningún subespacio de S_{p_1,q_1} para $1 < p_0, p_1 \leqslant 2$, $1 \leqslant q_0 \leqslant \infty$,

$1 \leqslant q_1 < \infty$ y $q_0 \neq q_1$. La técnica que empleamos para demostrarlo es totalmente diferente de la empleada en [6] y está basada en los resultados de M. Lévy [9, 10] sobre la presencia de subespacios isomorfos a l_q en el espacio de interpolación real $(A_0, A_1)_{\theta, q}$. Demostramos también que el resultado de C. Giel y C. Cleaver se verifica en el caso general.

2. PRELIMINARES

En lo que sigue usaremos la notación y definiciones de [12, 13] y de [2, 17] para los conceptos relativos a la geometría de los espacios de Banach y a la teoría de los espacios de interpolación, respectivamente.

Denotaremos por $1_{p, q}$ al espacio de sucesiones de Lorentz, formado por todas las sucesiones de escalares (ξ_n) convergentes a cero y tales que la norma que sigue es finita

$$\|(\xi_n)\|_{(p, q)} = c_{p,q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{(1/p)-1-1/q} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^*|\right)^q\right)^{1/q}$$

si $1 < p < \infty, 1 \leqslant q < \infty$

$$\|(\xi_n)\|_{(p, q)} = \sup_n \left(n^{(1/p)-1} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^*|\right) \text{ si } 1 < p < \infty, q = \infty$$

donde

$$c_{p, q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(q/p)-q-1}\right)^{-(1/q)} \quad \text{y} \quad (\xi_n^*)$$

designa la sucesión obtenida reordenando los elementos de (ξ_n) por magnitud de sus módulos: $|\xi_1^*| \geqslant |\xi_2^*| \geqslant \ldots$ (ver [15], 13.9 y [17], 1.18.3). Para $p = q$ se obtiene el clásico espacio de sucesiones p–sumables que se denota por $(1_p \; \| \; \|_p)$, teniendo ambos espacios normas equivalentes (ver [15], Prop. 13. 9. 5. y [17], Thm. 1. 18. 3/1).

Sea H un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Para $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, denotamos por $S_{p, q}$ al espacio de operadores de Lorentz, constituído por todos los operadores T lineales y continuos sobre H, tales que la sucesión $(\alpha_n(T))$ formada por los números de aproximación de T (ver [15], 11.2) pertenece a $l_{p, q}$.

Para cada $T \in S_{p, q}$ ponemos $\tau_{p,q}(T) = \|(\alpha_n(T))\|_{(p,q)}$. Como

$(l_{p,q} \; \| \; \|_{(p,q)})$ es un ideal de sucesiones normado con la propiedad de dominación (ver [15], Chap. 3), se sigue de [15], Thm. 15. 4. 4 que $(S_{p,q} \; \tau_{p,q})$ es un espacio de Banach. Además, puesto que para cada operador compacto T sobre H, los números de aproximación $(\alpha_n(T))$ coinciden con los números singulares $(s_n(T))$ de T, es decir, con los valores propios del operador positivo $[T^* \, T]^{1/2}$, se tiene que la p–clase de Schatten (ver [7]).

$$S_p = \left\{T \in C(H,H) \colon \sigma_p(T) = (\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p)^{1/p} < \infty\right\}$$

es igual a $S_{p,p}$, teniendo ambos espacios normas equivalentes.

De las inclusiones existentes entre los espacios $l_{p,q}$ se deduce que los espacios de operadores de Lorentz están ordenados en el siguiente sentido:

$S_{p,q}$ está contínuamente inyectado en $S_{r,s}$ si $1 < p < r < \infty$ y $S_{p,q}$ está continuamenta inyectado en $S_{p,s}$ si $1 \leqslant q < s \leqslant \infty$.

Por otra parte, para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q < \infty$, el espacio $S_{p,q}$ es separable ya que tiene base (ver [5]). El espacio $S_{p,\infty}$ contiene un subespacio isomorfo a l_∞ (ver [3], Prop. 3) luego no es separable. Además, S_2 es un espacio de Hilbert [15], Thm. 15. 5. 6.

Se demuestra en [14] que para $1 \leqslant p_0 \neq p_1 < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty, 0 < \theta < 1$ y $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ es válida la siguiente fórmula de interpolación.

$$S_{p,q} = (S_{p_0}, S_{p_1})_{\theta,q} \text{ (con normas equivalentes)} \tag{1}$$

De aquí se obtiene, como consecuencia directa de los resultados de M. Lévy [10] sobre la presencia de subespacios isomorfos a l_q en el espacio de interpolación real, el teorema que sigue:

Teorema L.– Sean $1 < p < r < \infty$ y $1 \leqslant q < \infty$. Todo subespacio cerrado de dimensión infinita de $S_{p,q}$ sobre el que las topologías de $S_{p,q}$ y S_r no coincidan, contiene un subespacio isomorfo a l_q.

Finalmente, recordemos las nociones de tipo y cotipo:

Definición ([13], *p.* 72).– Un espacio de Banach X se dice que es de tipo p para algún $1 \leqslant p \leqslant 2$ (resp. de cotipo s para algún $2 \leqslant s < \infty$) si existe una constante $M < \infty$ tal que, para todo conjunto finito de vectores $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ en X, se tiene

$$\int_0^1 \|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\| \, dt \leqslant M \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{1/p}$$

$$(\text{resp. } \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^s\right)^{1/s} \leqslant M \int_0^1 \|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\| \, dt)$$

donde (r_n) designa las funciones de Rademacher, definidas por $r_n(t) =$ signo(sen($2^n \pi t$)) para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Se prueba en [16] que los espacios S_p ($1 \leqslant p < \infty$) son de tipo mín(2, p) y cotipo máx(2, p). El tipo y cotipo de $S_{p,\, q}$ ($1 < p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$) ha sido calculado en [3].

3. LOS RESULTADOS

El teorema que sigue prueba que en el caso general se verifica también el resultado de C. Giel y C. Cleaver [6] mencionado en la introducción.

Teorema 1.– Sean $1 \leqslant p \neq q < \infty$ con $p \neq 2$. El espacio S_p no es isomorfo a ningún subespacio de S_q.

Demostración: Supongamos que $p \neq 2$ y que S_p es isomorfo a un subespacio de S_q. Entonces S_q contiene un subespacio isomorfo a l_p, ya que S_p lo contiene. Usando [1], Cor. 3. 2, se obtiene que l_q contiene un subespacio isomorfo a l_p, de donde se sigue, por [12], Prop. 2. *a.* 1 y Prop. 1. *a.* 12, que $p = q$.

Para los espacios de operadores de Lorentz tenemos:

Teorema 2.– Sean $1 < p_0, p_1 \leqslant 2$, $1 \leqslant q_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 < \infty$ y $q_0 \neq q_1$. El espacio $S_{p_0,\, q_0}$ no es isomorfo a ningún subespacio de $S_{p_1,\, q_1}$, salvo si $p_0 = q_0 = 2$.

Demostración: Supongamos que f es un isomorfismo de S_{p_0, q_0} sobre un subespacio B de S_{p_1, q_1}. Teniendo en cuenta la fórmula de interpolación(1) y los resultados de [9], se puede localizar también un subespacio A de S_{p_0, q_0} isomorfo a l_{q_0}. Razonemos distinguiendo los seis casos siguientes:

1^{er}) Caso: $q_0 = \infty$.
Entonces B no es separable, luego $q_1 = \infty$.

2°) Caso: $1 < p_0,\ p_1 < 2,\ 1 \leqslant q_0 < \infty$.
Ahora se tiene alguna de las situaciones que siguen:

(*i*) $f(A)$ no es cerrado en S_2.
Aplicando el Teorema L obtenemos que $f(A)$ contiene un subespacio isomorfo a l_{q_1}. Así pues l_{q_0} contiene un subespacio isomorfo a l_{q_1}, siendo $1 \leqslant q_0, q_1 < \infty$. Por tanto se sigue de [12], Prop. 2. a 1 y Prop. 1.a. 12, que $q_0 = q_1$.

(*ii*) $f(A)$ es cerrado en S_2.
Entonces $q_0 = 2$. Pero $B = f(S_{p_0, 2})$ no es cerrado en S_2 ya que ningún espacio $S_{p,q}$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty)$ es isomorfo a un espacio de Hilbert, salvo si $p = q = 2$ (ver [11] y [4]). Por tanto, aplicando otra vez el Teorema L, tenemos que B contiene un subespacio D isomorfo a l_{q_1}. Con lo cual, si $f^{-1}(D)$ es cerrado en S_2, se tiene que $q_1 = 2$, y si $f^{-1}(D)$ no es cerrado en S_2, entonces contiene un subespacio isomorfo a l_2, por lo tanto también $q_1 = 2$.

3^{er}) Caso: $1 < p_1 < p_0 = 2,\ 1 \leqslant q_0 \leqslant 2$.
Si $f(A)$ no es cerrado en S_2, razonando como en la situación (*i*) del apartado anterior, se obtiene $q_0 = q_1$. En caso contrario, el espacio l_{q_0} debe ser isomorfo a l_2, luego $q_0 = 2$.

4°) Caso: $1 < p_1 < p_0 = 2,\ 2 < q_0 < \infty$.
Ahora $f(A)$ no puede ser cerrado en S_2, ya que $q_0 > 2$. Por

tanto $f(A)$ contiene un subespacio isomorfo a l_{q_1}, de donde se sigue $q_0 = q_1$.

5°) Caso: $1 < p_0 < p_1 = 2$, $1 \leqslant q_0 < \infty$.
Se tiene una de las dos situaciones siguientes:

(*i*) $f(A)$ no es cerrado en S_p para ningún $p > 2$.

Entonces $f(A)$ contiene a l_{q_1}, por tanto $q_0 = q_1$.

(*ii*) $f(A)$ es cerrado en S_p para algún $p > 2$.

Entonces l_{q_0} es de cotipo $2 + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y de tipo 2, luego $q_0 = 2$. Pero el espacio $B = f(S_{p_0, 2})$ de cotipo 2 ([3], Prop. 2) no puede ser cerrado en S_p si $p > 2$, pues en ese caso sería también de tipo 2 y por consiguiente [8] isomorfo a un espacio de Hilbert. Por tanto B contiene un subespacio D isomorfo a l_{q_1}. Ahora puede ocurrir que $f^{-1}(D)$ sea cerrado en S_2, lo que implica $q_1 = 2$, o que $f^{-1}(D)$ no sea cerrado en S_2, en cuyo caso $f^{-1}(D)$ contiene un subespacio isomorfo a l_2 y de nuevo $q_1 = 2$.

6°) Caso: $p_0 = p_1 = 2$, $1 \leqslant q_0 < \infty$.
El resultado se obtiene de nuevo distinguiendo las situaciones (*i*) e (*ii*) del apartado anterior.

Observación 1.– Es fácil comprobar (ver por ejemplo [4], Remark 2. 1) que $S_{p,q}$ $(1 < p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty)$ contiene subespacios isomorfos a S_2

Observación 2.– La idea de emplear el Teorema L para obtener resultados sobre la estructura de los espacios de operadores de Lorentz $S_{p,q}$ ha sido tomada de [10].

BIBLIOGRAFIA

[1] ARAZY, J.: Basic sequences, embeddings, and the uniqueness of the symmetric structure in unitary matrix spaces, J. Funct. Anal. 40, 302 – 340 (1981).

[2] BERGH, J. AND LÖFSTRÖM, J.: "Interpolation spaces, an introduction", Springerr–Verlag, Berlín–Heidelberg–New York, (1976)

[3] COBOS, F.: On the type of interpolation spaces and $S_{p,q}$, *Math. Nachr.* 113, 59–64 (1983)

[4] COBOS, F.: Some results on Lorentz operator spaces, preprint.

[5] FUGAROLAS, M. A. AND COBOS, F.: On Schauder bases in the Lorentz operator ideal, *J. Math. Anal. Appl.* 95, 235–242 (1983).

[6] GIEL C. AND CLEAVER, C.: Packing spheres in C_p spaces, Studia Math. 72, 1–8 (1982)

[7] GOHBERG, I. C. AND KREIN, M. G.: "Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto–adjoints dans un espace hilbertian", Dunod, París, (1971)

[8] KWAPIEN, S.: Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.* 44,583-595 (1972).

[9] LEVY, M.: L'espace d'interpolation réel $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ contient l^p, *Compt. Rend. Acad. Sci. París* 289, A675–A677 (1979).

[10] LEVY, M.: These, L'unversité Pierre et Marie Curie. (1980)

[11] LEWIS, D. R.: An isomorphic characterization of the Schmidt class, *Compositio Math.* 30, 293–297 (1975)

[12] LINDENSTRAUSS J. AND TZAFRIRI, L.: "Classical Banach spaces. Vol. I, Sequence spaces", Springer–Verlag, Berlín–Heidelberg–New York, 1977.

[13] LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L.: "Classical Banach spaces, Vol. II, Function spaces", Springer–Verkag, Berlin–Heidelberg–New York, (1979).

[14] MERUCCI, C.: Interpolation dans $C^{\omega}(H)$, Compt. Rend. Acad. Sci. París 274, A1163–A1166 (1972)

[15] PIETSCH, A.: "Operator ideals", North–Holland, Amsterdam–New York–Oxford, (1980).

[16] TOMCZAK–JAEGERMANN, N.: The moduli of smootheness and convexity and the Rademacher averages of trace classes S_p $(1 \leqslant p < \infty)$, *Studia Math.* 50, 163–182 (1974).

[17] TRIEBEL, H.: "Interpolation theory, function spaces. differential operators", North–Holland, Amsterrdam–New York–Oxford, (1978)